CORRIGE

APPLI : SIGMA principes élémentaires

1- Rang, développement

Développer selon les rangs

$$\sum_{i=1}^4 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

(les rangs étant 1,2,3,4 c'est-à-dire : le premier, le second, le troisième, le quatrième))

$$\sum_{j=3}^6 y_j = y_3 + y_4 + y_5 + y_6$$

(les rangs étant 3,4,5,6 c'est-à-dire : le troisième, le quatrième, le cinquième, le sixième)

2- Commutativité

Appliquer la règle aux expressions

$$\sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^4 (x_i) + \sum_{i=1}^4 (y_i)$$

$$\sum_{j=1}^3 (y_j + z_j) = \sum_{j=1}^3 (y_j) + \sum_{j=1}^3 (z_j)$$

$$\sum_{i=2}^6 (m_i \times p_i) = !! \text{ le produit n'est pas commutatif}$$

3- Développer, réarranger, simplifier

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) \text{ (développement)} \\ &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \text{ (réarrangement ou regroupement)} \\ \text{Et en SIMPLIFIANT} &= \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i) + \sum_{i=1}^4 (y_i)$$

4- Que faire avec la constante a ou b

Simplifier ces expressions à l'aide des règles relatives aux constantes (plutôt directement, ou après développement si vous les souhaitez)

$$\sum_{j=1}^3 (y_j + a) = \sum_{j=1}^3 (y_j) + \sum_{j=1}^3 a$$

Dans l'expression (à gauche) la constante a est ADDITIONNEE

La commutativité (à droite) montre que la constante a , doit être BORNEE : **application de la règle « dernier rang – premier rang + 1 »**, donc :

$$\sum_{j=1}^3 (y_j + a) = \sum_{j=1}^3 (y_j) + \sum_{j=1}^3 a = \sum_{j=1}^3 (y_j) + (3 - 1 + 1)a = \sum_{j=1}^3 (y_j) + 3a$$

$$\sum_{i=3}^5 (z_i + a - b) = \sum_{i=3}^5 (z_i) + \sum_{i=3}^5 a - \sum_{i=3}^5 b$$

Dans l'expression (à gauche) la constante a est ADDITIONNEE, la constante b est SOUSTRAITE. Ces deux opérateurs (+ et -) vérifient la commutativité (à droite).

La commutativité montre que a et b doivent être BORNEES : : **application de la règle « dernier rang – premier rang + 1 »**, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^5 (z_i + a - b) &= \sum_{i=3}^5 (z_i) + \sum_{i=3}^5 a - \sum_{i=3}^5 b = \sum_{i=3}^5 (z_i) + (5 - 3 + 1)a - (5 - 3 + 1)b \\ &= \sum_{i=3}^5 (z_i) + 3a - 3b \end{aligned}$$

$$\sum_{i=2}^6 (a \times x_i) = \sum_{i=2}^6 (ax_i) = a \sum_{i=2}^6 (x_i)$$

Dans l'expression (à gauche) la constante a est MULTIPLICATRICE. La constante a doit alors « être mise en facteur » (à droite) : **règle de la sortie de la constante.**

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{y_i}{b}\right) = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{b} \times y_i\right) = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{b} y_i\right) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^4 (y_i)$$

Dans l'expression (à gauche) la constante b est un DIVISEUR. La constante b doit alors « être mise en facteur » (à droite) : **règle de la sortie de la constante.**

RESUME DES REGLES relatives à la constante :

- 1) L'addition et la soustraction sont commutatives
- 2) La multiplication et la division ne sont pas commutatives
- 3) Une constante additionnée ou soustraite doit être bornée
- 4) Une constante multiplicatrice ou diviseur doit être sortie

5- Passer au numérique (Trois exemples)

Exemple 1

On vous fournit les informations suivantes relatives aux valeurs de la variable z_i et aux constantes a et b . Soit

$$a = 10$$

$$b = 5$$

i	1	2	3	4	5	6
z_i	85	69	47	38	100	200

On vous demande de donner la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{i=2}^5 (z_i - a + b) = \sum_{i=2}^5 (z_i) - \sum_{i=2}^5 a + \sum_{i=2}^5 b = \sum_{i=2}^5 (z_i) - (5 - 2 + 1)a + (5 - 2 + 1)b = \sum_{i=2}^5 (z_i) - 4a + 4b$$

$$= 254 - (4 \times 10) + (4 \times 5) = 254 - 40 + 20 = 234$$

Puisque : $a = 10$ et $b = 5$

i	1	2	3	4	5	6	$\Sigma(i=2\text{à}5)$
z_i	85	69	47	38	100	200	254

-Exemple 2-

la variable x_i est le montant du chiffre mensuel d'une entreprise. Il a varié comme suit :

chiffre d'affaire mensuel en milliers d'Euros												
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	30	45	27	35	50	20	25	38	54	43	30	30

La constante n est le taux d'imposition = 40%

- Ecrire avec le symbole SIGMA l'expression du **MONTANT ANNUEL TOTAL DES IMPOTS PAYES**.
- Donner l'expression algébrique et le montant exact de l'impôt.

L'expression :

$$\sum_{i=1}^{12} (x_i \times n) = n \sum_{i=1}^{12} (x_i) = 0,4 \times 427.000\text{€} = 170.800\text{€}$$

Puisque :

$$n = 0.4$$

et le montant total du chiffre d'affaire ANNUEL

chiffre d'affaire mensuel en milliers d'Euros													
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\Sigma(i=1\text{à}12)$
x_i	30	45	27	35	50	20	25	38	54	43	30	30	427

-Exemple 3-

On vous fournit les informations suivantes relatives aux valeurs de la variable y_j et à la constante m . Soit :

$$m = 100$$

i	0	1	2	3
y_j	185	697	300	1750

On vous demande de donner la valeur exacte de la somme :

$$\sum_{j=0}^3 (y_j + m) = \sum_{j=0}^3 (y_j) + \sum_{j=0}^3 m = 2747 + (3 - 0 + 1)m = 2747 + (4 \times 100) = 2747 + 400 = 3147$$

Puisque :

$m = 100$ et il est additionné 4 fois

et

i	0	1	2	3	$\Sigma(j=0\grave{a}3)$
y_j	185	697	300	1750	2747

6- Double somme du produit de deux variables indicées non correspondantes (ou croisées)

Un étudiant a obtenu 3 notes (x_i) dans trois épreuves coefficientées (y_j), qui sont les suivantes :

	y_j	1	2	3	
x_i					
4					
12					
14					

Lire par exemple : il a obtenu une note égal à 4, une fois dans une épreuve coefficientée 1 (elle vaut donc 4), puis dans deux autres épreuves coefficientées respectivement 2 (la note 4 vaut 8) et 3 (la note 4 vaut 24).

Travail demandé : trois questions

- 1) Compléter le tableau en réalisant les calculs nécessaires pour obtenir le total général des points obtenus. Que vous permet de lire le tableau obtenu ?

Il suffit de multiplier chaque ligne (i) par chaque colonne (j), et de totaliser en ligne et en colonne. Soit ces calculs :

$x_i \backslash y_j$	1	2	3	Total ligne
4	4	8	12	24
12	12	24	36	72
14	14	28	42	84
Total colonne	30	60	90	180

On lit que le total des points obtenus est de 180. Il a obtenu 30 points dans les épreuves à coefficients 1, et 60 et 90 points dans les épreuves à coefficients respectifs 2 et 3.

Il a donc obtenu la moitié des points possibles, soit 180 sur 360. Il a donc la moyenne, soit 10/20.

(NB remarque. On aura pu remarquer qu'en effectuant la moyenne des 3 notes obtenues on obtient la moyenne immédiatement : $(4+12+14)/3 = 30/3 = 10$ soit 10/20). Cette moyenne est identique à celle du tableau ($180/360 = 0,5$ soit 10/20). Ceci tient évidemment à notre hypothèse peu réaliste selon laquelle toutes les notes subissent les mêmes

coefficients. Ce qui ne fait que augmenter proportionnellement le calcul. Dans la réalité, si on ajoute par exemple une note de 16/20 obtenue dans la seule épreuve à coefficient 3, alors il n'y a plus identité des moyennes, comme ci-dessus).

- 2) Transformer ce tableau en tableau algébrique, en écrivant correctement le contenu de chaque cellule, jusqu'au total général

$x_i \backslash y_j$	Y_1	Y_2	Y_3	Σ LIGNES
X_1	X_1Y_1	X_1Y_2	X_1Y_3	$X_1(y_1+y_2+y_3)$ $=X_1(\sum_{j=1}^3 y_j)$
X_2	X_2Y_1	X_2Y_2	X_2Y_3	$X_2(y_1+y_2+y_3)$ $=X_2(\sum_{j=1}^3 y_j)$
X_3	X_3Y_1	X_3Y_2	X_3Y_3	$X_3(y_1+y_2+y_3)$ $=X_3(\sum_{j=1}^3 y_j)$
Σ COL	$Y_1(\sum_{i=1}^3 x_i)$	$Y_2(\sum_{i=1}^3 x_i)$	$Y_3(\sum_{i=1}^3 x_i)$	voir ci-dessous

NB : NB : Ecritures équivalentes de sigma par les logiciens

$$\sum_{i=1}^4 x_i \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^4 x_i$$

Le total général s'écrit sous la forme d'une double somme, de 4 manières équivalentes :

La double somme : 4 expressions équivalentes

$$\begin{aligned} & \text{Total lignes (suivant } i) \\ & \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 y_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (x_i \times y_j) \\ & \text{équivalent à} \quad \text{Total colonnes (suivant } j) \\ & \left(\sum_{j=1}^3 y_j \right) \times \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 (y_j \times x_i) \end{aligned}$$

- 3) Dites comment votre connaissance des propriétés de sigma, aurait pu vous donner le total général des points sans avoir à compléter le tableau.

L'expression algébrique du total général se lit : **La double somme est le produit des sommes des modalités lignes et colonnes.**

Le total général aurait donc pu être obtenu immédiatement en effectuant l'opération

Somme des modalités lignes (i) : $4 + 12 + 14 = 30$

Somme des modalités colonnes (j) : $1 + 2 + 3 = 6$

Produit des deux sommes : $30 \times 6 = 180$

Ce résultat est toujours vrai quels que soient i et j allant de 1 à n .

Fin du corrigé

-ÿ-